解病态线性方程组的一类直接方法*

赵金熙

（南京大学）

§1 引　言

我们讨论的问题是解亚定方程组

$$A^Tx=b, \tag{1.1}$$

其中 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in R^{m\times n}$，$m\geqslant n$，$\mathrm{rank}(A)=n$。

设 σ_1、σ_n 分别是 A 的最大、最小奇异值。则当

$$K_2(A)=\sigma_1/\sigma_n>>1$$

时，传统的解 (1.1) 的数值方法都会遇到不同程度的困难，往往使算法严重失效。

近年来讨论较多的一类递推算法[1]、[2]、[4]、[6]是解病态线性方程组的有效算法，如[4]讨论了下列算法：

算法 I

(1) 用直交化方法确定 $R(A)=\mathrm{span}[a_1,\cdots,a_n]$ 的一组标准直交基 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，且 $p_i\in\mathrm{span}[a_1,\cdots,a_{i-1}]^\perp$；

(2) 令 $x_0=0$，对 $i=1,2,\cdots,n$ 计算

$$x_i=x_{i-1}+\alpha_ip_i,\quad \alpha_i=(b_i-a_i^Tx_{i-1})/p_i^Ta_i,$$

其中 b_i 为 b 的第 i 个分量；

(3) x_n 就是 (1.1) 的极小范数解。

这一类算法的基本思想是在第 k 步求得 x_k，使 x_k 为 (1.1) 的前 k 个方程的解。这类算法的关键在于逐次构造 A 的象空间 $R(A)$ 的直交基向量，而这一组直交基向量精度的差异（$p_i\in\mathrm{span}[a_1,\cdots,a_{i-1}]^\perp$ 的破坏）又受 A 的条件数的严重影响。例如，我们在算法 I 的第(1)步用改进 Gram－Schmidt 直交化方法来求得 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，且令

$$Q=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$$

为精确的（理论上的）列直交阵，$\overline{Q}=[\overline{p_1},\overline{p_2},\cdots,\overline{p_n}]$ 为实际算得的矩阵，则在一定假设下已经证明[4]：

$$\|I-\overline{Q}^T\overline{Q}\|\leqslant\frac{1.74}{(1-\beta)^{\frac12}}\,n^{\frac12}(n+1)\times2^{-t}\|A\|_E\|R^{-1}\|_2,$$

$$\beta=3.42\,n^{\frac12}(n+1+2.5m)2^{-t}\|A\|_E\|R^{-1}\|_2.$$

1986年9月4日收到。

*国家教委自然科学基金资助项目。

而

$$\|A\|_E\|R^{-1}\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{2}}K_2(A).$$

因此，确定 $R(A)$ 的直交基是这一类递推算法的重要问题。

本文给出了一类解病态线性方程组(1.1)的递推算法，其基本思想是引进一个可供选择的 $n\times n$ 非奇异上三角阵 W，使得 AW 的列向量有较强的线性独立性。据此确定 $R(AW)$ 的一组直交基 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得

$$p_i \in R(A_{i-1})^{\perp} = \mathrm{span}[a_1,\cdots,a_{i-1}]^{\perp} \tag{1.2}$$

§2 给出了基本算法；§3 讨论基本算法的性质；§4 方法的实现及矩阵 W 的选取；§5 $R(A)$ 的直交基对解的影响；§6数值结果表明本文讨论的算法有很好的数值稳定性。

§2　基本算法

在本文讨论的一类递推算法中，所不同的是确定满足 $p_{i+1}\in R(A_i)^{\perp}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的标准直交向量系 $p_1,p_2,\cdots,p_n$。也就是说，若 $Q_iQ_i^{\top}$ 是 $R(A_i)$ 的直交投影算子，则就可以有

$$p_{i+1}=[(I-Q_iQ_i^{\top})a_{i+1}]/\beta_{i+1},\quad i=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{2.1}$$

其中

$$\beta_{i+1}=\|(I-Q_iQ_i^{\top})a_{i+1}\|_2,$$

得到 $R(A)$ 的一组互相直交的基底。

这个算法的关键在于确定对所有 i 都有 $p_{i+1}\in R(A_i)^{\perp}$ 的 $R(A)$ 的直交基底 $\{p_i\}$。而这又取决于 A 的列向量间的相关性程度，为此可以采取下列二种途径加以克服：

(1) 当 A 的列向量间有较强的线性相关性时，就确定 A 的伪秩，作为亏秩问解求解；

(2) 引进非奇异条件予优矩阵 P，使得 AP 的条件比 A 的条件要好，然后解

$$APy=b \tag{2.2}$$

得

$$x=Py \tag{2.3}$$

上面两种处理方法对病态问题往往都能收到一定的效果。

这里我们是引进一个可供选择的非奇异上三角阵 W，使 AW 的列向量有较强的线性独立性，由此构造满足 $p_{i+1}^{\top}a_j=0(j=1,2,\cdots,i)$ 的 $R(A)$ 的直交基向量 $p_1,p_2,\cdots,p_n$。

这个算法与条件预优方法有所不同，它不是建立与 (1.1) 等价的条件预优方程 (2.2)，而是以 AW 的列向量来确定 $R(A)$ 的一组直交基向量，而可望这一组基向量能较好地满足 (1.2)。

设引进的 $n\times n$ 阶非奇异上三角矩阵 W 为

$$W=[w_1,w_2,\cdots,w_n],\quad A=[a_1,\cdots,a_n],\ b=[b_1,\cdots,b_n]^{\top}$$

则可以构造下列算法：

算法Ⅱ（基本算法）

(1) 确定非奇异上三角矩阵 $W=[w_1,\cdots,w_n]$，令 $x_0=0$，$H_0=I$；

(2) 对 $i=1,2,\cdots,n$ 计算

$$v_i=H_{i-1}Aw_i,\quad p_i=v_i/\beta_i,\quad \beta_i=\|v_i\|_2,$$

$$x_i=x_{i-1}+\alpha_i p_i,\quad \alpha_i=(b_i-a_i^{\top}x_{i-1})\,/\,p_i^{\top}a_i$$

$$H_i=H_{i-1}-p_i p_i^{\top};$$

(3) x_n 就是 (1.1) 的极小范数解。

§3 算法的基本性质

算法Ⅱ中的寻查方向 $\{p_i\}$、校正矩阵 $\{H_i\}$ 和解向量 $\{x_i\}$ 有一些重要的性质。

定理 1 由算法Ⅱ得到的向量系 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是一组标准直交向量系，且满足

$$p_{i+1}\in R(A_i)^{\perp},\qquad i=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.1}$$

证明 由于 $W=[w_1,\cdots,w_n]$ 是 $n\times n$ 上三角矩阵，故 Aw_i 是 $a_1,a_2,\cdots,a_i$ 的线性组合，则利用数学归纳法不难证明 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是一组标准直交向量系，又由于 p_i 是 $Aw_1,Aw_2,\cdots,Aw_i$ 的线性组合。故

$$\mathrm{span}[p_1,\cdots,p_i]=\mathrm{span}[Aw_1,\cdots,Aw_i]=\mathrm{span}[a_1,a_2,\cdots,a_i].$$

而

$$p_{i+1}\in\mathrm{span}[p_1,p_2,\cdots,p_i]^{\perp}$$

则有

$$p_{i+1}\in\mathrm{span}[a_1,\cdots,a_i]^{\perp}$$

定理得证。

(3.1) 式在构造递推算法中有重要的作用。

定理 2 对 $i=1,2,\cdots,n$，由算法Ⅱ得到的校正矩阵 $\{H_i\}$ 满足

$$H_i^{\top}=H_i,\qquad H_i^2=H_i \tag{3.2}$$

$$H_i p_j=\begin{cases}0 & i\geqslant j\\ p_j & i<j\end{cases} \tag{3.3}$$

$$H_iH_j=H_j,\qquad j\geqslant i \tag{3.4}$$

也就是说，H_i 是 $R(A_i)^{\perp}$ 上的直交投影算子。

证明 由 H_i 的表达式及 $H_0=I$，易见

$$H_i=H_i^{\top}. \tag{3.5}$$

由定理 1 得 $\{p_i\}$ 为一直交向量系，则用数学归纳法可以证明 $H_i^2=H_i$，这就证明了 (3.2) 式，即 H_i 为一直交投影算子。

又由于当 $i\geqslant j$ 时

$$H_i p_j = (I - \sum_{k=1}^{i} p_k p_k^\top) p_j = 0, \tag{3.6}$$

而 $i<j$ 时有

$$H_i p_j = (I - \sum_{k=1}^{i} p_k p_k^\top) p_j = p_j, \tag{3.7}$$

又因为

$$p_j \in R(A_{j-1})^\top$$

故 H_i 是 $R(A_i)^\top$ 的直交投影算子。另一方面，当 $i \leqslant j$ 时

$$\begin{aligned} H_i H_j &= H_i (H_i - \sum_{k=i+1}^{j} p_k p_k^\top) \\ &= H_i - \sum_{k=i+1}^{j} p_k p_k^\top \\ &= H_j. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.5)—(3.8)定理得证。

由定理 1.2 可以证明

定理 3　设直交向量系 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 由算法Ⅰ得到，并令

$$Q_i = [p_1, \cdots, p_i], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则

$$R(Q_n) = R(AW) = R(A) \tag{3.9}$$

$$H_i = I - Q_i Q_i^\top, \ \text{rank}\ (H_i) = n - i. \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.10}$$

由此可以看出，算法Ⅱ给出了构造 $R(AW)$ 的直交基底的方法，并以此为寻查方向得到解 (1.1) 的一类递推法。更进一步有：

定理 4　设 x_i 是算法Ⅱ在第 i 步得到的解，则

$$X = x_i + H_i y, \qquad y \in R^n \tag{3.11}$$

是

$$\begin{pmatrix} a_1^\top \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_i^\top \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

的通解，而 x_i 是 (3.12) 的极小范数解。

证明　因为 $p_1, p_2, \cdots, p_i$ 是 $R(A_i)$ 的一组直交基，故 A_i 总能表示成

$$A_i = [p_1, \cdots, p_i] R_i = Q_i R_i \tag{3.13}$$

其中 R_i 是 $i \times i$ 非奇异阵，因此

$$A_i A_i^+ = Q_i Q_i^\top.$$

这样对任何 $y \in R^n$ 都有

$$H_t y=(I-Q_t Q_t^{\top}),\ y\in N(A_t^{\top})$$

这里$N(A_t^{\top})$为$A_t^{\top}$的零空间，而x_t是(3.12)的一个解，故

$$x=X_t+H_t y \tag{3.14}$$

是(3.12)的通解。下面证明由算法Ⅰ得到的x_t是(3.12)的极小范数解。

由(3.14)得

$$x^{\top}x=x_t^{\top}x_t+2y^{\top}H_t x_t+(H_t y)^{\top}(H_t y)$$

故

$$x^{\top}x\geqslant x_t^{\top}x_t+2y^{\top}H_t x_t\,.$$

由于x_t能够表示成$p_1,p_2,\cdots,p_t$的线性组合，再利用(3.3)式得

$$H_t x_t=0.$$

因此

$$x^{\top}x\geqslant x_t^{\top}x_t\,.$$

故由算法Ⅰ得到的x_t是(3.12)的极小范数解，也就有

推论 由算法Ⅰ得到的x_n是(1.1)的极小范数解。

§4 方法的实现及矩阵W的选取

由前面的讨论，我们可以看出，算法Ⅰ的基本步骤大致可以分为两步，首先是确定$R(AW)$的一组直交基$p_1,p_2,\cdots,p_n$；然后再根据这一组直交基构造递推公式。因此，我们可用下列基本步骤来实现。

算法Ⅱ

(1) 确定$n\times n$非奇异上三角阵$W=(w_1,\cdots,w_n)$，令$x_0=0$；

(2) 用直交化分解（如改进Gram－Schmidt方法等，但无需存贮上三角阵R）得到$R(AW)$的直交基$p_1,p_2,\cdots,p_n$；

(3) 对$i=1,2,\cdots,n$计算

$$x_t=x_{t-1}+\alpha_t p_t;\ \alpha_t=(b_t-a_t^{\top}x_{t-1})/p_t^{\top}a_t;$$

(4) x_n就是(1.1)的极小范数解。

在基本算法Ⅰ、Ⅱ中都需要确定$n\times n$的上三角阵W，从理论上讲，只要W非奇异就能保证

$$R(AW)=R(A),$$

故对AW的列向量进行直交化的过程就能得到$R(A)$的一组直交基向量$p_1,\cdots,p_n$。而要求W为上三角阵是为了保证

$$p_t\in R(A_{t-1})^{\perp} \tag{4.1}$$

的条件成立。也就是说，只要W为非奇异的上三角阵时，算法Ⅰ、Ⅱ总能继续下去。

但是对W的不同选取，效果是很不相同的，在这里W的选取是重要的，无疑我们

要求 AW 的列向量有较强的线性独立性。

另一方面，我们可以这样看。设 A 有直交分解

$$A=Q_1R_1 \tag{4.2}$$

其中 Q_1 为 $m\times n$ 的列直交阵，R_1 为 $n\times n$ 的上三角阵，若取

$$W=R_1^{-1}$$

则 $R(AW)=R(Q_1)$，故 AW 的列向量为直交向量，这当然是最理想的。但由于我们是在有限精度的计算机上计算，这种选取矩阵 W 的方法有时是不现实的。但这也给我们以启发，如果取(4.2)中上三角阵 R_1 的近似逆阵作为 W，可望 AW 的列向量有较强的线性独立性。

设(4.2)中的矩阵 R_1 为

$$R_1=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

我们把由元素 $r_{11},r_{22},\cdots,r_{nn}$ 组成的主对角线称为 R_1 的第1条对角线；把 $r_{12},\cdots,r_{n-1,n}$ 称为 R_1 的第2条对角线；…；$r_{1k},\cdots,r_{n-k+1,n}$ 称为 R_1 的第 k 条对角线；显然 R_1 的第 n 条对角线由单个元素 r_{1n} 组成。

这样我们取 R_1 的前 k 条对角线组成的矩阵的逆阵作为 W。为了区别起见，我们以 $W_0,W_1,\cdots,W_n$ 表示

$$W_0=I,$$

$$W_1=\begin{pmatrix} r_{11} & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}^{-1},\quad W_2=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$W_k=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & r_{n-k+1,n} & \\ 0 & & & r_{n-1,n} & \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix}^{-1},\quad 1\leqslant k\leqslant n。$$

计算 w_k 有一个简单递推式，记 $w_k=[w_{ij}]$，则

$$w_{ii}=1/r_{ii},\quad i=1,2,\cdots,n。$$

$$w_{i,i+j}=-\Big(\sum_{l=1}^{j} r_{i,i+l}\,w_{i+l,i+j}\Big)/r_{ii}$$

$$j=1,2,\cdots,k-1。$$

w_k的其它元素为0。§6的表4可以看出，不同的选取k，结果一般是不同的，而当A为极端坏条件（如Hilbert矩阵）时，k一般要比较接近于n。若A为一般坏条件矩阵时，k可取小一些，如$[\frac{n}{2}]$。数值结果表明，这种处理方法对病态线性方程组是很有效的。上面的讨论可归纳成下面的算法。

算法Ⅳ

(1) 对A作直交分解$A=Q_1R_1$；

(2) 确定$1\leqslant k\leqslant n$，进行下列计算

(2.1) 对$n\times n$矩阵W置零，即$0\Rightarrow W$；

(2.2) 对$l=1,2,\cdots,k-1$计算

对$i=1,2,\cdots,n-l$计算

$ss=0.0$,

对$j=1,2,\cdots,l$计算

$ss=ss+r(i,i+j)*w(i+j,i+l)$

end j

$w(i,i+l)=-ss/r(i,i)$

end i;

end l.

(3) 对AW进行直交分解得到直交阵

$Q=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$;

(4) 令$x_0=0$，对$i=1,2,\cdots,n$计算

$$x_i=x_{i-1}+\alpha_i p_i,\quad \alpha_i=(b_i-a_i^{\top}x_{i-1})/p_i^{\top}a_i$$

(5) x_n就为(1.1)的极小范数解。

另外，我们知道上面算法的极端情形是取$W=R_1^{-1}$或$W=I$，当$W=I$时算法Ⅳ就退化为算法Ⅱ；当取$W=R_1^{-1}$时，若不计舍入误差应有

$$AW=Q_1 \tag{4.6}$$

但由于精度所限及坏条件影响，(4.6)一般是不成立的。但这时对Q_1作直交分解，即

$$Q_1=QR \tag{4.7}$$

然后以Q的列向量为递推算法的寻查方向，得到(1.1)的极小范数解，这时有算法，

算法Ⅴ

(1) 对A作直交分解$A=Q_1R_1$；

(2) 对Q_1作直交分解得到$R(A)$的直交基

$Q=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$。

(3) 令$x_0=0$，对$i=1,2,\cdots,n$计算

$$x_i=x_{i-1}+\alpha_i p_i,\quad \alpha_i=(b_i-a_i^{\top}\ x_{i-1})/p_i^{\top}a_i$$

(4) x_n 就是(1.1)的极小范数解。

这个算法的数值结果明显地高于 $W=I$ 时的情形(比直接取 $W=R_1^{-1}$ 稍差一些)，也是解病态线性方程组值得推荐的一个算法。

§5 R(A)的直交基对解的影响

前面我们讨论了算法的基本性质及具体实现，这里我们要讨论这样两个问题，其一是(1.1)的子方程组的解与(1.1)的解的关系；其二是 $R(A)$ 的直交基对解的影响。

首先我们注意下列数值例子，设问题为解

$$Ax=b \tag{5.1}$$

其中

$$A=[a_{ij}],\quad a_{i1}=a_{1i}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$
$$a_{ij}=a_{i-1,j}+a_{i,j-1}\qquad i,j=2,\cdots,n.$$

$$b=[b_1,\cdots,b_n]^T,\quad b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

这时(5.1)的精确解 $x^*=[1.1,\cdots,1]^T$。例如 $n=5$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&6&10&15\\1&4&10&20&35\\1&5&15&35&70\end{pmatrix},\quad b=[5,\ 15,\ 35,\ 70,\ 126]^T.$$

当 n 较大时(例 $n=20$，30，40，…)。这类矩阵是极端坏条件的，但我们用算法Ⅰ在计算机上进行计算，得到的解 x 的相对误差却接近于0，这是什么原因呢？事实上，我们仔细分析一下就可以发现，由算法Ⅰ得到的

$$x_1=\frac{b_1}{a_1^Ta_1}a_1=a_1=[1,1,\cdots,1]^T.$$

这就是说，用递推算法Ⅰ得到(5.1)的第一个方程

$$a_1^Tx=b_1$$

的解刚好就是整个问题的解。故若忽略舍入误差的影响应有

$$X^*=x_{n-1}=\cdots=x_1.$$

更一般地可以明证

定理4　设 x_j^* 是方程组

$$\begin{pmatrix}a_1^T\\\vdots\\a_j^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_j\end{pmatrix},\qquad j\leqslant n$$

的解，则 x_j^* 为(1.1)的解 x^* 的充要条件是

$$a_{j+k}=0,\quad k=1,2,\cdots,n-j. \tag{5.2}$$

这个定理告诉我们，若由递推算法得到 $x_1,x_2,\cdots$，能是 x^* 较好的近似，则 $|a_{j+k}|$ 就较少。这时有可能得到好的数值结果。问题(5.1)的结果就属此例，关于 $\{a_j\}$ 对解的影响及其校正公式已有[4]讨论。

另一方面，我们注意到算法Ⅰ的计算公式，其中 a_i 的选择是使得 x_i 是 $a_i^{\top}x=b_i$ 的解。而

$$p_i\in R(A_{i-1})^{\perp} \tag{5.3}$$

的要求是十分重要的，也是递推算法的核心，它是要求 x_i 同时为(1.1)的前 $i-1$ 个方程组解的需要。

下面我们在其它计算都是精确的假设下，来分析(5.3)的条件破坏时对解的影响。若仅在第 j 步 ($j>1$) 时有误差

$$(p_j,\ a_i)=e_{ij},\quad i=1,2,\cdots,j-1;$$

这时可以验证得到的解向量

$$x_j=x_{j-1}+\alpha_j p_j$$

满足方程组

$$\begin{pmatrix} a_1^{\top} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot^{\top} \\ a_j \end{pmatrix} x_j=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_j \end{pmatrix}+\alpha_j\begin{pmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{j-1,j} \\ 0 \end{pmatrix}$$

在第 n 步得到的解向量

$$x_n=x_{n-1}+\alpha_n p_n.$$

从理论上讲应有

$$x_n=x^*.$$

但若(5.3)式不成立且有下列误差量

$$(p_j,\ a_i)=e_{ij} \tag{5.4}$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

$$i=1,2,\cdots,j-1$$

则可以证明

定理5 假设在算法Ⅰ中的其他量都是精确的，而 $\{p_i\}$ 满足(5.4)式，则算法Ⅰ得到的 x_n 满足方程组

$$A^{\top}x=b+E\alpha \tag{5.5}$$

其中 $n\times n$ 矩阵 E 及 n 维向量 α 分别为

$$E=\begin{pmatrix} 0 & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T.$$

由(5.5)式可以看出，误差量(5.4)式的作用相当于在(1.1)的右端加上扰动量$E\alpha$。这也说明，递推算法中影响解的两个因素是E，α，即(5.3)式的破坏程度及$\{\alpha_i\}$的排列次序。

综上所述，(5.3)的条件对递推算法是极为重要的，新算法的基本思想是引进非奇异上三角阵W，使AW的列向量有较强的线性独立性，据[5]可知，这样能使(5.3)式不致严重破坏，使解有较高的精度，§6的数值结果也说明了这一点。

§6　数值结果

为了检验不同算法抗病态问题的能力，下列四个算法在南京大学数学系计算数学实验室MC 68000微机上用双精度进行了计算，从大量的数值结果中选用一部分予以比较。为了与前面的记号一致，各种算法的意义为：

算法Ⅰ　首先对A作直交分解得到$R(A)$的直交基，$p_1,p_2,\cdots,p_n$，以此构造递推算法；

算法Ⅳ　就是本文讨论的算法 取W为非奇异上三角阵(这里取$W=R_1^{-1}$)。然后确定$p_1,\cdots,p_n$再构造递推算法。

算法Ⅴ　与§4节给出的算法Ⅴ相同。

直交化算法　就是传统的处理方法，对$n\times n$矩阵A^T作直交分解$A^T=Q_1R_1$，由$R_1^Tx=Q_1^Tb$得到解x。

所解的向题是$A^Tx=b$，其中A^T为下列三种情况：

情况1：　$A^T=[a_{ij}]$，　$a_{ij}=1.\phi/(i+j-1.\phi)$，
$i,j=1,2,\cdots,n$；　$n=5,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$；

情况2：　$A^T=[a_{ij}]$，　$a_{ij}=\max\ (i,j)$
$i,j=1,2,\cdots,n$；　$n=5,10,20,30,40$；

情况3：　$A^T=[a_{ij}]$，　$a_{i,n}=a_{ni}=0.5$，　$i=1,2,\cdots,n$；
$a_{ij}=a_{i+1,j}+a_{i,j+1}$，　$i,j=1,2,\cdots,n$；　$n=5,10,20,30,40$，

上面三种情况的右端向量为$b=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$，其中

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\times j \qquad i=1,2,\cdots,n$$

在上面三个向题中，当n稍大时(如$n\geqslant 10$)，情况1和情况3是极端坏条件问题，情况2是好条件向题。

下列表中A表示算法；P表示解的相对精度；N为方程组的阶数。表中“没有精度”是指解的相对误差大于1；“没有误差”是指解的相对误差接近于机器零。

表 1 对情况 1 的精度比较表

A / P / N	直交化算法	算法 Ⅰ	算法 Ⅳ	算法 Ⅴ
5	0.415917E−06	0.873737E−08	0.970667E−12	0.981205E−12
10	没有精度	0.133390E−02	0.187779E−07	0.230986E−07
20	没有精度	没有精度	0.396569E−07	0.926750E−07
30	没有精度	0.245479E−01	0.896361E−07	0.113388E−06
40	没有精度	0.230835E−01	0.973126E−07	0.249898E−06

表 2 对情况 2 的精度比较表

A / P / N	直交化算法	算法 Ⅰ	算法 Ⅳ	算法 Ⅴ
5	0.111916E−12	没有误差	0.341324E−14	没有误差
10	0.101130E−12	误有误差	没有误差	没有误差
20	0.259641E−10	没有误差	0.828951E−16	$0.3^{3}1580E-16$
30	0.198133E−09	没有误差	没有误差	没有误差
40	0.769324−09	没有误差	0.222250E−15	0.291851E−12

从表 1 可以看出，算法Ⅳ、Ⅴ对极病态的问题（*Hilbert* 矩阵的一部分）有较高的精度，优于传统的直交化方法。

表 2 说明对好条件问题，所列的算法都有较高的精度。

表 3 对情况 3 的精度比较表

A / P / N	直交化方法	算法 Ⅰ	算法 Ⅳ	算法 Ⅴ
5	0.418514E−08	0.359577E−10	0.150551E−13	0.100420E−13
10	没有精度	0.351512E−02	0.167809E−07	0.301305E−07
20	没有精度	没有精度	0.122031E−06	0.444713E−07
30	没有精度	没有精度	0.454497E−06	0.644640E−07
40	没有精度	没有精度	0.166855E−05	0.160371E−06

前面已经指出，在算法Ⅳ中，对角线条数的不同选取对解的精度是有影响的。对极病态的向题 1 和问题 3（取 $n=20$）我们给出下列比较表（见表 4）。

从表 4 可以看出，对选取不同的 k 值，解的精度也不同，但一般总比取 $W=I$（即 $k=0$，传统的直交化方法）时精度有较大的提高，说明本文给出的算法为解病态问解提

供了较有效的可供选择的方法。

表4　对角线数 k 对解的精度的影响（$n=20$）

k \ P \ A	情 况 1	情 况 3
0	没有精度	没有精度
2	0.169481$E-01$	0.224965$E-01$
5	0.516895$E-02$	0.777550$E-01$
8	0.542695$E-02$	0.542695$E-02$
14	0.524998$E-03$	0.119325$E-02$
17	0.517806$E-04$	0.351137$E-04$
20	0.396569$E-07$	0.122031$E-06$

下面给出在情况1中取 $n=60$（即系数矩阵为60阶的Hilbert矩阵）时用算法Ⅳ得到的解向量，精确解为 $x^*=(1,2,\cdots,60)^T$。

表5　情况1（$n=60$）由算法Ⅳ得到的解向量

.1000000$E01$	.2000000$E01$	.3000000$E01$	.3999994$E01$	.5000008$E01$
.5999998$E01$	.7000003$E01$	.7999994$E01$	.8999987$E01$	.1000002$E02$
.1100000$E02$	.1200000$E02$	.1300000$E02$	.1400000$E02$	.1500000$E02$
.1600000$E02$	.1699999$E02$	.1799999$E02$	.1900000$E02$	.1999999$E02$
.2100000$E02$	.2200001$E02$	.2300001$E02$	.2400001$E02$	.2500000$E02$
.2600002$E02$	.2700000$E02$	.2799999$E02$	.2900001$E02$	.3000001$E02$
.3100000$E02$	.3200000$E02$	.3299997$E02$	.3399999$E02$	.3499998$E02$
.3599998$E02$	.3699999$E02$	.3800000$E02$	.3900002$E02$	.4000002$E02$
.4100003$E02$	.4200000$E02$	.4300001$E02$	.4399998$E+02$	.4500001$E02$
.4599999$E02$	.4700000$E02$	.4800004$E02$	.4900000$E02$	.5000001$E02$
.5099999$E02$	.5199999$E02$	.5300001$E02$	.5399998$E02$	.5499999$E02$
.5599998$E02$	.5700000$E02$	.5799997$E02$	.5899998$E02$	.6000006$E02$

表5说明，尽管60阶的Hilbert矩阵是极端坏条件的，但由算法Ⅳ得到的解向量仍有6位有效数字，这是传统算法所难以达到的。

本文是在何旭初先生的指导下完成的，笔者深表谢意。

参考文献

〔1〕 Huang, H. Y., A direct methcd for the general solution of a system of linear equation. JOTA, 16, 429—445, 1975.

〔2〕 Abaffy, J., et al. A class of direct methods for linear systems, Num. Math. 45, 361—376, 1984.

〔3〕 何旭初，广义逆矩阵的基本理论与计算方法，上海科技出版社，1985.

〔4〕 赵金熙，解相容线性方程组的高精度算法，南京大学数学系科研报告，1985.

〔5〕 Ake, Björck, Solving linear least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization, BIT 7 (1967).

〔6〕 赵金熙，相容线性方程组的 Huang 方法及其推广，高等学校计算数学学报，Vol. 3, No. 1, 8—17, 1981.

A CLASS OF DIRECT METHODS FOR SOLVING ILL-CONDITIONED LINEAR SYSTEMS

Zhao Jinxi

(Nanjing University)

Abstract

In this paper, a class of direct methcds for solving ill-conditioned linear systems is given. A *nonsingular supper triangular matrix* W *is introduced* so that linear independence of AW's column vectors are strong. So we can obtain a "good" orthogonal basis of $R(AW)$. After that we used it to construct recursion algorithms for solving linear systems. Numerical examples show that the class of methods is very efficient.